

32-AMALIY MASHG‘ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O‘qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O‘quv mashg‘ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg‘ulot mavzusi bo‘yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o‘tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo‘yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg‘ulot mavzusiga oid nazariy ma’lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg‘ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

32-MAVZU. BERNULLI TENGLAMASIGA DOIR MISOLLAR YECHISH

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamani aytamiz.

Teorema. Agar $a(x)$ va $b(x)$ funksiyalar biror I intervalda uzluksiz bo‘lsa u holda $\Gamma = \{(x, y) : x \in I, -\infty < y < \infty\}$ sohaning ixtiyoriy olingan (x_0, y_0) nuqtasidan (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig‘i o‘tadi va bu chiziq

$$y = \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right] e^{A(x)}, \quad e^{A(x)} = \int_{x_0}^x a(t) dt \quad (2)$$

formula bilan ifodalanadi.

(2) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilishning **o‘zgarmaning variatsiyalash** usuli bilan tanishamiz. $y' = a(x)y$ tenglama (1)ga mos bir jinsli tenglama deb ataladi. Bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lib uning umumiy yechini yozaylik: $y = Ce^{A(x)}$. (1) tenglamani umumiy yechimini

$$y = C(x)e^{A(x)} \quad (3)$$

ko‘rinishda qidiramiz. (3) funksiyani va uning hosilasini (1)ga qo‘yamiz:

$$C'(x)e^{A(x)} + C(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x).$$

Bundan

$$C'(x) = e^{-A(x)}b(x), \quad C(x) = C + \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t)dt.$$

$C(x)$ ning topilgan ifodasini (3)ga qo'ysak (1) tenglamanaing **umumiy yechimi** hosil bo'ladi:

$$y = \left[C + \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t)dt \right] e^{A(x)}. \quad (4)$$

(1) tenglamani umumiy yechimini **integrallovchi ko'paytuvchi** usulida ham hosi qilish mumkin. $\mu(x) = e^{-A(x)}$ funksiya (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. (1)ni bu funksiya ga ko'paytiramiz:

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}a(x)y = e^{-A(x)}b(x);$$

$$\left(e^{-A(x)}y \right)' = e^{-A(x)}b(x);$$

$$e^{-A(x)}y = C + \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t)dt.$$

Ohirgi tenglikni $e^{A(x)}$ ifodaga ko'paytirsak (4) umumiy yechim hosil bo'ladi.

1-Misol. $y' - \frac{2}{x}y = x$ tenglamani o'zgarmasni variatsiyalash usulida umumiy

yechimini topamiz. Unga mos bir jinsli tenglama $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = Cx^2$. Berilgan tenglamani umumiy yechimini $y = C(x)x^2$ ko'rinishda qidiramiz.

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x} \cdot C(x)x^2 = x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}, \quad C(x) = \ln |x| + C$$

Bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz: $y = x^2(\ln |x| + C)$

Endi tenglamani integrallovchi ko'paytuvchi usulida yechamiz. Uni

$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ ifodaga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{1}{x^2}y \right)' = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}y = \ln |x| + C, \quad y = x^2(\ln |x| + C).$$

Javob: $y = x^2(\ln |x| + C)$.

Bernulli tenglamasi deb

$$y' = a(x)y + b(x)y^m \quad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $m=0$ bo'lsa bu tenglama (1) ko'rinishni oladi. Agar $m=1$ bo'lsa (5) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadan iborat. Biz $m \neq 0$ va $m \neq 1$ bo'lgan holda (5) tenglamani integrallash ketma-ketligini ko'rib chiqamiz. (5)ni y^m ga bo'lamiz:

$$y^{-m}y' = a(x)y^{1-m} + b(x)$$

No'ma'lum funksiyani $z = y^{1-m}$ formula bilan almashtiramiz ($z' = (1-m)y^{-m}y'$):

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Bu tenglama z ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir va biz uni integralalshni yuqorida ko'rib o'tdik.

Ta'kidlash joizki $m > 0$ bo'lgan holda (1) tenglama hamma vaqt $y=0$ yechimga ega bo'ladi. Agar $m < 1$ bolsa bu yechim mahsus yechimdan, aks holda hususiy yechimdan iborat.

2-Misol. $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$ tenglamani qaraymiz. Uni y^2 ga bo'lamiz:

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Bu yerda $y^{-1} = z$ almashtirish bajaramiz, natijada: $z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$. Bu chiziqli tenglamani umumiy yechimi $z = \frac{1}{x}(C + x)$. Bundan $y = \frac{x}{C+x}$. Berilgan tenglamaning bu umumiy yechimga kirmagan $y=0$ hususiy yechimi ham mavjud.

Javob: $y = \frac{x}{C+x}, y=0$.

3-reja. Rikkati tenglamasi deb

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (6)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $a(x) \equiv 0$ bo'lsa bu tenglama (1) ko'rinishni olai. Agar $c(x) \equiv 0$ bo'lsa (6) tenglama Bernulli tenglamasidan iborat bo'ladi.

Teorema. Agar Rikkati tenglamasining bitta hususiy yechimi ma'lum bo'lsa u holda uni kvadraturalarda integrallash mumkin.

3-Misol. $y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1$ tenglamani qaraymiz. Bu erda $y = x$ hususiy yechim. $y = \frac{1}{z} + x$ almashtirish bajaramiz, u holda $z' + 3x^2z = -x$ bundan

$$z = e^{-x^2} \left(C - \int x e^{x^2} dx \right).$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini yozamiz: $y = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2} x dx}$.

Javob: $y = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2} x dx}$, $y = x$.

Misollar va masalalar

Tenglamalarning umumiy yechimini toping:

a) $y' = e^{2x} - e^x y$;

б) $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$;

в) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

г) $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$;

д) $\frac{x dy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$.